ТЕМА 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, СТРУКТУРНАЯ СХЕМА ОПИСАНИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

1.1. О предмете исследования

Идеи и основные принципы теории управления подвижными объектами, в основном военного назначения, возникли в тридцатые годы прошлого столетия. Были поставлены задачи расчета траекторий для достижения заданной высоты или дальности, планирования траекторий движения в условиях ограниченных ресурсов и тому подобное. Появление кибернетики и электронно-вычислительных машин (ЭВМ) позволило значительно ускорить и улучшить расчеты, ввести понятие оптимальности. В основном использовался подход, связанный с вариационным исчислением. В 50-х гг. был разработан новый подход: принцип максимума Понтрягина [1], который позволил сложную задачу оптимального управления свести к более простой задаче – решению систем дифференциальных уравнений и оптимизации.

Другим мощным методом теории управления стал метод динамического программирования Беллмана [2]. Идея метода динамического программирования состоит в том, что оптимизационная задача большой размерности сводится к последовательности задач оптимизации меньшей размерности. Это дает возможность построить достаточно простые рекуррентные формулы для нахождения управления на всем интервале времени. Впрочем, в дискретном случае для значительного количества точек разбиения интервала в памяти ЭВМ надо хранить очень большое количество вариантов, что привело к так называемому "проклятию размерности" для этого метода.

В рамках этих трех основных подходов (вариационное исчисление, принцип максимума Понтрягина, динамическое программирование) разработано много методов нахождения управлений для различных классов задач: технических, экономических, социальных и других.

Для постановки задач оптимального управления необходимо, в первую очередь, определить целевую функцию оптимизационного процесса. С этой целью надо выяснить физический или технический смысл задачи и записать ее формальным языком математических соотношений. Для осуществления эффективного управления процессом нужно выбрать адекватную математическую модель, которая учитывала бы различные внешние воздействия, действующие на систему. При условии, что выбраны математическая модель и целевая функция, известны параметры системы и ее текущее состояние, можно ставить задачу нахождения наилучшего управления, которое оптимизировало бы целевую функцию.

Для иллюстрации постановки задач теории управления приведем наиболее простые и наглядные примеры.

Пример 1.1.[3, 5]. Рассмотрим движение в плоскости маятника, подвешенного к точке опоры с помощью жесткого невесомого стержня. Уравнение движения маятника после определенных преобразований можно привести к виду:

$$\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) + \sin x(t) = u(t)\,, \tag{1.1}$$

где $x(t)$ – угол отклонения маятника, $\dot{x}(t)$ – скорость маятника, β – параметр, $u(t)$ – управление, выбор которого может влиять на движение маятника.

Обозначим $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = \dot{x}(t)$. Тогда уравнение (1.1) можно переписать в виде эквивалентной системы двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\beta x_2(t) - \sin x_1(t) + u(t) \end{cases}. \tag{1.2}$$

Пусть в начальный момент времени t_0 маятник отклонен на определенный угол с определенной начальной скоростью, то есть:

$$\begin{gathered} x_1(t_0) = x_1^0 \\ x_2(t_0) = x_2^0. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Будем считать также, что на управляющий параметр наложены ограничения:

$$|u(t)| \le u^*,\ u^* = const > 0,\ t_0 \le t \le t_1\,. \tag{1.4}$$

Имея математическое описание физической задачи, можем поставить задачу оптимального управления, например, остановить маятник в точке устойчивого равновесия за минимальное время, то есть минимизировать функционал

$$T_{\min} = \min_u (t_1 - t_0) = \min_u \int_{t_0}^{t_1} dt, \tag{1.5}$$

При условии, что

$$\begin{aligned} x_1(t_1) &= 2\pi \\ x_2(t_1) &= 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Пример 1.2.[4]. Пусть математическая точка A массой m движется вдоль прямой. На нее действует сила u. Положение точки A характеризуется координатой: $x = x(t)$.

Пусть также выполняются условия:

$$x(t_0) = x_0, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} = 0, \tag{1.7}$$

$$|u| \le \bar{u},\ (\bar{u} > 0), \tag{1.8}$$

где $\bar{u}$ - заданное значение.

Ставится задача: определить силу $u = u_0(t)$, под действием которой точка A движется так, что из заданного начального состояния (1.7) перемещается в другое заданное состояние на момент $t = t_1$:

$$x(t_1) = x_1, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_1} = 0 \tag{1.9}$$

за минимально возможное время (1.5).

Для решения задачи надо записать уравнение движения точки A. Согласно второму закону Ньютона это уравнение можно представить в виде:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = u. \tag{1.10}$$

Точку A, движение которой изменяется за счет внешней силы, рассматриваем как пример управляемой системы. Величину u будем называть управляющим воздействием, функцией управления или просто управлением. Поставленная задача минимизации времени (1.5) в теории управления называется задачей быстродействия.

При решении таких задач используется понятие фазовых координат и фазового пространства. В данном примере фазовыми координатами являются две переменные - $x_1(t)$, $x_2(t)$, связанные с переменной $x(t)$ равенствами: $x_1 = x(t), x_2 = \dfrac{dx}{dt}$; фазовым пространством является координатная плоскость.

Тогда формулу (1.10) можно записать в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ m\dfrac{dx_2}{dt} = u \end{cases} \qquad (1.11)$$

а граничные условия (1.7), (1.9) в виде:

$$\begin{aligned} & x_1(t_0) = x_1^0 = x^0 \qquad && x_1(t_1) = x_1^1 = x^1 \\ & x_2(t_0) = 0 && x_2(t_1) = 0 \end{aligned} \qquad (1.12)$$

Точку A_1 с координатами $(x_1(t), x_2(t))$ на плоскости $X_1 0 X_2$ называют фазовой точкой системы. Плоскость (см. рис. 1.1) называют фазовой плоскостью, или, вообще говоря, - фазовым пространством, элементами которого являются векторы фазовых координат.

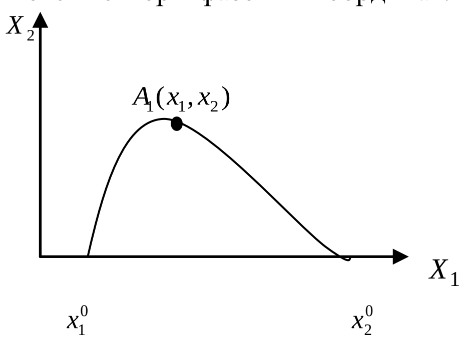

Рис. 1.1. Пример траектории движения точки A_1 под воздействием управления

С изменением времени t точка меняет свое положение в результате получается фазовая траектория системы (рис. 1.1.).

Поставленную задачу можно сформулировать так: найти управления u с допустимой области (1.8), с помощью которого система (1.11) с одной заданной точки пространства x_1^0 переходит в другую заданную точк x_2^0 за минимальное время.

Пример 1.3. Пусть движение объекта описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ m\dfrac{dx_2}{dt} = u \end{cases} \tag{1.13}$$

Модель (1.13) можно интерпретировать как математическую модель полета объекта (например, ракетоносителя).

Пусть известно что в начальный t_0 и конечный t_1 моменты времени система должна находится в заданных состояниях:

$$\begin{array}{ll} x_1(t_0) = x_1^0 & x_1(t_1) = x_1^1 \\ x_2(t_0) = x_2^0 & x_2(t_1) = x_2^1. \end{array} \tag{1.14}$$

Пусть начальный и конечный моменты времени – известны и управление ограничено:

$$|u| \le \bar{u}. \tag{1.15}$$

Ставится задача: найти управление $u^0(t)$ на отрезке $[t_0, t_1]$, которое переводит систему из начальной точки (x_1^0, x_2^0) в точку (x_1^1, x_2^1) за фиксированное время $T = t_1 - t_0$ и обеспечивает минимум целевой функции:

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} u(t)dt \to \min_u .$$

Такое управление $u^0(t)$ называется оптимальным управлением.

Пример 1.4. Приведем одну из задач оптимального распределения ресурсов в динамических системах на примере модели боя двух сторон A и B.

Динамику боя можно описать такой системой уравнений [4]:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -bx_2 + u(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -ax_1 + v(t) \end{cases},$$

где $x_1(t)$ – количество боевых единиц со стороны A, оставшиеся боеспособными на момент времени $t \in [t_0, t_1]$, $x_2(t)$ – количество боевых единиц, остались боеспособными на момент времени t для стороны B; $u(t)$, $v(t)$ – темпы поступления боевых единиц из резерва для сторон A и B соответственно на момент времени t; a, b – средние эффективности скорости стрельбы боевых единиц сторон A и B соответственно; $T = t_1 - t_0$ – заданное время боя.

Пусть в начальный момент t_0 боя известны:

$$x_1(t_0) = x_1^0$$

$$x_2(t_0) = x_2^0$$

а также величина $v(t)$.

Однук из задач оптимального управления боем можно сформулировать следующим образом: найти управления $u^0(t)$ при ограничениях: $0 \le u(t) \le \bar{u}$, $\int\limits_{t_0}^{t_1} u(t)dt \le \bar{\bar{u}}$, чтобы достигался экстремум выбранного функционала качества $Q(u(t))$. Здесь $\bar{u}$, $\bar{\bar{u}}$ – заданные величины.

Критерием лучшего управления может быть выбрана определенная цель боя, например:

$Q = x_2(t_1) \to \min\limits_u$ – на конец боя сторона B имеет меньше боевых единиц;

$Q = x_1(t_1) \to \max\limits_u$ – цель стороны A: максимальное сохранение своих боевых единиц на конец боя.

Можно ввести и другие критерии оптимальности.

Пример 1.5. Пусть задана управляемая система движения

$$\frac{dx_1}{dt} = u \qquad (1.16)$$

и система движения со случайными возмущениями:

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + \xi(t)\,. \qquad (1.17)$$

Здесь $\xi(t)$ – случайный процесс, а управление ограничено: $|u(t)| \le k = const, t \in [t_0, t_1]$.

Цель управляемой системы (1.16) – воспроизвести движение неуправляемой системы (1.17). Поскольку $x_2(t)$ – случайный процесс, то критерий оптимальности записывается через математическое ожидание:

$$Q = M\{Q_1\} = M\{\int_{t_0}^{t_1} [(x_1 - x_2)]^2 + u^2\} \to \min_u \qquad (1.18)$$

Приведенные примеры различных прикладных приложений и разных постановок задач управления свидетельтвуют о необходимости и важности изучения данной предметной области.

1.2. Структурная схема описания систем управления

Система управления в общем случае можно представить в виде структурной схемы:

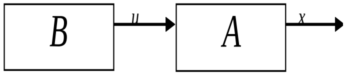

Рис. 1.2. Структурная схема системы управления

Здесь: A – объект управления; B – устройство управления (или управляющее устройство), $x = x(t) = \left(x_1(t), \ldots, x_n(t)\right)^T$ – вектор фазовых координат или фазовое состояние системы, T – знак транспонирования; $x(t) \in X$, X – фазовое пространство, $u = u(t) = \left(u_1(t), \ldots, u_r(t)\right)^T$ – векторная функция управления.

Вектор $x(t)$ называют выходным сигналом. Вектор $u(t)$ называют входным сигналом (входом к объекту управления A).

Будем считать, что фазовое состояние $x(t)$ объекта управления A в произвольный момент времени $t > t_0$ определяется полностью и однозначно его известным начальным состоянием $x(t_0)$ и упралением $u(t)$ при $t > t_0$. Пару векторных функций $(u(t), x(t))$ называют процессом управления. Для различных систем управления внутренние характеристики объекта управления описываются соответствующими зависимостями различной природы - алгебраическими, дифференциальными, интегральными и др.

Правила (закон) преобразования входных сигналов в выходные называют уравнением объекта.

Широко распространенные непрерывные системы управления, объекты которых описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (см. Примеры 1.1 - 1.3). Такие системы называют системами с сосредоточенными параметрами. Системы управления, объекты которых описываются с помощью дифференциальных уравнений в частных производных, называются системами с распределенными параметрами.

Критериями оптимальности управления (критериям качества объекта управления) есть функции или функционалы на экстремум.

Содержание оптимальности в различных задачах может быть различным:

– приведение системы к заданному состоянию за кратчайший промежуток времени, то есть чем быстрее;

– минимизация энергетических затрат на управление;

– минимизация отклонения фазового состояния системы от заданной траектории и тому подобное.

Процесс управления, который обеспечивает экстремум (минимум или максимум) функционала качества объекта управления, называется оптимальным процессом управления.

Например, системы управления, для которых критерием качества является минимум времени перехода системы из одного множества состояний в другую, называют системами, оптимальными по быстродействию.

Рассмотрим теперь, какие функции выполняет устройство управления B (рис. 1.2).

Рассмотрим два существенно различных типа систем управления.

1) Системы программного управления или открытые (незамкнутые) системы (системы без обратной связи).

В таких системах объекты управления A имеют точно определенные заранее уравнения, описывающие их функционирование. Считается, что эти объекты управления лишены влияния случайных возмущений. Критерий качества для них является детерминированной величиной. Все каналы связи, такие как устройства управления и объекта управления, защищены от любых случайных внешних воздействий и возмущений.

Оптимальное управление $u^0(t)$ можно вычислить заранее для всех t еще до начала функционирования системы, а управляющее устройство B должен обеспечить только подачу рассчитанного заранее управления $u^0(t)$ на вход объекта управления A. По такому принципу можно управлять системой, приведенной в примере 1.1.

Впрочем, системы программного управления имеют ограниченное применение на практике. Как правило, система управления имеет дополнительные линии связи, по которым поступает информация о состоянии объекта A на вход управляющего устройства B.

2) Системы управления с обратной связью (замкнутые системы управления).

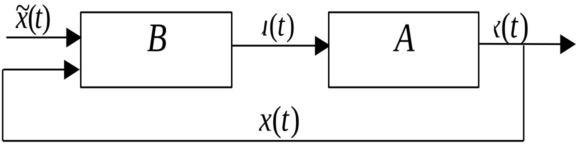

Рис. 1.3. Система управления с обратной связью

Здесь $\tilde{x}(t)$ – заданное (программное) влияние, определяющее работу устройства B. Обратная связь необходима, поскольку динамические характеристики систем могут быть известны лишь приближенно и, кроме того, на систему могут влиять внешние возмущения, как правило, случайного характера. Контур обратной связи позволяет управляющему устройству учитывать информацию о реальном положении объкта, рассчитывать отклонения от программной траектори и делать, при необходимости, соответствующую коррекцию движения.

Системы со случайными возмущениями, действующими на объект управления, можно изобразить в виде структурной схемы:

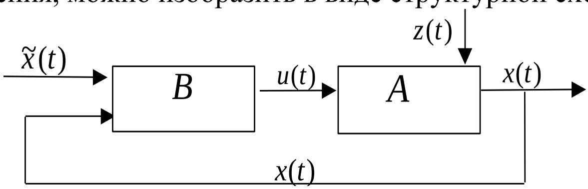

Рис. 1.4. Система управления с обратной связью и воздействием случайных возмущений

Здесь $z(t)$ – вектор случайных возмущений.

Критерий оптимальности для таких систем: найти минимум (максимум) функционала

$$Q = M\{\int_{t_0}^{t_1} G(\tilde{x}(t), x(t), u(t), z(t), t)dt\}$$

где $M\{\cdot\}$ – математическое ожидание.

Отметим, что параметры управления реальных систем не могут принимать произвольные значения, а принадлежат некоторому допустимому множеству: $u(t) \in \Omega(U)$. Множество $\Omega(U)$ называют областью допустимых управлений (или областью управления), где U – пространство переменных $u_1,\ldots,u_r$. Множество $\Omega(U)$ задается, как правило, системой равенств или неравенств.

Аналогично $x(t) \in \Omega(X)$, где $\Omega(X)$ – область возможных состояний системы, X – пространство переменных $x_1,\ldots,x_n$.

В общем случае ограничения могут быть заданы как функционалы, зависящие от вектор-функций $u(t)$, $x(t)$, $z(t)$:

$$L_\mu[x(t),u(t),z(t)] \in \Omega_\mu(L)\ ,\ \mu = \overline{1,m}\ ,$$

где $\Omega_\mu(L)$ – допустимая область изменения функционала, m – заданное число.

Замечания 1.1. В большинстве случаев, в теории управления считается, что управления являются кусочно-непрерывными или измеримыми функциями. Считается также, что функции $u_i(t)$ в точках разрыва непрерывны справа; кроме того, $u_i(t)$ – непрерывные на концах отрезка, где $i = 1,\bar{k}$, $\bar{k}$ – количество точек разрыва. Кусочно-непрерывные управления позволяют для широкого класса систем получить точное математическое решение задачи оптимизации.

Терминология, приведенная выше, справедлива не только для непрерывных систем, но и для дискретно-непрерывных и дискретных систем управления.

Классификация систем управления возможна также и по другим признакам:

1) Системы с полной информацией об объекте управления. Такие системы - математическая абстракция потому, что в управляющее устройство B введена полная априорная информация: уравнение объекта, все ограничения, информация о критерии оптимальности, о сигнале $x(t)$, возмущения $z(t)$, о состоянии $x(t)$ в каждый момент времени t, что в реальных системах сделать почти невозможно.

Впрочем, эта абстракция часто с достаточной точностью соответствует реальным системам управления, когда неполнотой информации можно пренебречь.

2) Системы с неполной информацией об объекте управления и пассивным ее накоплением в процессе управления. Пусть неполнота информации – это неполнота заданного сигнала $x(t)$: то есть на вход поступает сигнал $y(t): y(t) \neq \tilde{x}(t)$. Процесс накопления информации о входе $x(t)$ не зависит от алгоритма (стратегии) управляющего устройства B. Накопление информации заключается в наблюдении и построении прогноза о сигнале $x(t)$. Сам процесс наблюдения не зависит от того, какое решение примет устройство B о характере $x(t)$.

3) Системы с неполной информацией об объекте управления, но с активным накоплением ее в процессе управления (системы дуального управления). Устройство B подает на A некоторую конечную последовательность управлений $\{u_i(t)\}$, (здесь i – индекс последовательности) и по обратной связи получает реакции $\{y_i(t)\}$, которые анализируются управляющим устройством B. Устройство B делает выводы о характеристиках объекта управления, в частности, о сигнале $x(t)$. Цель этих действий объекта B – способствовать более точному изучению характеристик объекта управления A для более эффективного управления этим объектом, то есть для генерации необходимых управлений. Системы с неполной информацией возникают из-за того, что на систему влияют случайные, непредвиденные возмущения.

1.3. Математическая постановка задачи оптимального управления

Для математической постановки задачи оптимального управления рассмотрим фазовые координаты системы как функции времени $x = x(t)$ на некотором интервале $t_0 \le t \le t_1$. В начальный момент t_0 нужно задать начальное условие $x(t_0) = x_0$, а также управление как функцию времени $u = u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))^T$ при $t \in [t_0, t_1]$. Тогда фазовые координаты $x = x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$ определяются как решение задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t \in [t_0, t_1],$$
$$x(t_0) = x_0,$$

где $f(x(t), u(t), t) = (f_1(x(t), u(t), t), \ldots, f_n(x(t), u(t), t))^T$ – известная вектор-функция, $f_j(x(t), u(t), t), \quad j = \overline{1, n}$ – компоненты вектора $f(x(t), u(t), t)$, t – время. Функция $f(x(t), u(t), t)$ описывает внутренние характеристики объекта управления и учитывает внешние воздействия на объект.

Определение 1.1. Непрерывная функция $x = x(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, что удовлетворяет равенству

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + x_0, \quad t_0 \le t \le t$$

называется решением данной задачи Коши или траектории, соответствующей начальному условию $x(t_0) = x_0$ и управлению $u = u(\cdot)$ и обозначается через $x = x(\cdot, u, x_0)$ или $x = x(t, u, x_0)$. Начальная точка траектории $x(t_0, u, x_0)$ называется левым концом траектории, t_0 – начальным моментом времени, $x(t_1, u, x_0)$ называется правым концом траектории, t_1 – конечным моментом времени.

Перейдем к постановке задачи оптимального управления в общем случае.

Пусть

$$x(t) = x(t, u(\cdot), x_0) \in G(t), t_0 \le t \le t_1 \tag{1.19}$$

$$t_0 \in \Theta_0, t_1 \in \Theta_1 \tag{1.20}$$

где $G(t)$ – некоторое заданное множество из $E^n : G(t) \subset E^n$, а Θ_0, Θ_1 – заданные множества на числовой оси $R = \{t : -\infty < t < +\infty\}$.

Не исключено, что $\Theta_0 = R, \Omega_1 = R$.

Ограничения вида (1.19) часто называют фазовыми ограничениями.

Функция управления $u = u(t)$ должны удовлетворять определенные требования непрерывности и гладкости, так как при слишком разрывных функциях $u(t)$ поставленная задача и управление $u(t)$ могут не иметь смысла. В большинстве прикладных задач управления $u(t)$ выбираются в виде кусочно непрерывных функций (см. замечание 1.1.). Напомним, что функция $u(t)$ называется кусочно-непрерывной на отрезке $[t_0, t_1]$, если $u(t)$ непрерывная во всех точках $t \in [t_0, t_1]$ за исключением, возможно, лишь конечного числа p точек $\tau_1, \ldots, \tau_p$ отрезка $[t_0, t_1]$, в которых функция $u(t)$ может иметь разрывы первого рода, то есть существуют конечные пределы

$$\lim_{t \to \tau_i - 0} u(t) = u(\tau_i - 0), \quad \lim_{t \to \tau_i + 0} u(t) = u(\tau_i + 0), \quad i = \overline{1, p}.$$

Есть классы задач управления, в которых от функций $u(t)$, кроме непрерывности, требуется существование их кусочно-непрерывных производных. Такие управления называют кусочно-гладкими.

Управление $u(t)$, вообще говоря, удовлетворяет определенным ограничениям, которые запишем в виде

$$u(t) \in V(t), \quad t_0 \le t \le t_1,$$

где $V(t)$ – заданное множество: $V(t) \subseteq E^r$ при каждом $t \in [t_0, t_1]$.

Например, в ограничениях (1.4) например 1.1. множество $V(t)$ имеет вид

$$V(t) = \{u : u \in E^1, |u(t)| \le u^*, \forall t \in [t_0, t_1]\}.$$

Ограничения (1.20) нужны, потому что начальный и конечный моменты времени могут зависеть от управления (например, в задачах быстродействия) и не всегда могут быть заданы заранее. Тогда указывают ограничения типа (1.20).

Рассмотрим условия на концах траектории $x(t)$. Из ограничения (1.19) следует, что при $t = t_0$ и $t = t_1$: $x(t_0) \in G(t_0)$, $x(t_1) \in G(t_1)$ соответственно.

Впрочем, бывают ситуации, например, при $G(t)=E^n$, $t_0 \le t \le t_1$, когда ограничения на концах удобнее выделять и рассматривать отдельно.

Будем считать, что в E^n при каждом $t_0 \in \Theta_0$ задано множество $S_0(t_0)$ и при каждом $t_1 \in \Theta_1$ задано множество $S_1(t_1)$.

Условия на концах траектории будем записывать в виде:

$$\begin{aligned} &x(t_0) \in S_0(t_0), t_0 \in \Theta_0, \\ &x(T) \in S_1(T), T \in \Theta_1. \end{aligned} \tag{1.21}$$

В задачах оптимального управления принята следующая классификация условий (1.20), (1.21): если множество Θ_0 состоит из единственной точки, то начальный момент времени называют фиксированным; если Θ_1 состоит из единственной точки T, то конечный момент времени называют фиксированным.

Если множество $S_0(t_0)$ (или $S_1(t_1)$) состоит из одной точки и не зависит от t_0: $S_0(t_0)=\{x_0\}, t_0 \in \Theta_0$ (или соответственно $S_1(T)=\{x_1\}, T \in \Theta_1$), то говорят: левый (или правый) конец траектории закреплен.

Если $S_0(t_0) \equiv E^n, t_0 \in \Theta_0$, или $S_1(t_1) \equiv E^n, t_1 \in \Theta_1$, то левый (или правый) конец траектории называют свободным.

В других случаях левый (или правый) конец траектории называют подвижным (может двигаться по заданной кривой).

Например:

$$S_0(t_0)=\left\{\begin{matrix} y : y \in G(t_0), h_i(y,t_0) \le 0, i=\overline{1,m}, \\ h_i(y,t_0)=0, i=\overline{m_0+1,s_0} \end{matrix}\right\} \tag{1.22}$$

где функция $h_i(y,t_0)$ определена для $y \in G(t), t \in \Theta_0$, а числа m, m_0, s_0 заданы.

Во многих приложениях часто возникают задачи, в которых левый и правый конце траектории выбираются в зависимости друг от друга. Это можно записать так:

$$(x(t_0), x(t_1)) \in S(t_0,t_1), t_0 \in \Theta_0, t_1 \in \Theta_1, \tag{1.23}$$

где множество $S(t_0,t_1)$ при каждом $(t_0,t_1)\in\Theta_0\times\Theta_1$ – заданное декартовое произведение множеств $E^n\times E^n$.

Пример такого множества:

$$S_0(t_0,t_1)=\left\{\begin{matrix}(x,y)\in E^n\times E^n, g_i(x,y,t_0,t_1)<0, i=\overline{1,m},\\ g_i(x,y,t_0,t_1)=0, i=\overline{m+1,s}\end{matrix}\right\} \quad (1.24)$$

где $g_i(x,y,t_0,t_1)$, $\quad i=\overline{1,s}$ – заданные функции переменных:

$$(x,y,t_0,t_1)\in E^n\times E^n\times\Theta_0\times\Theta_1.$$

Понятно, что множества $S_0(t_0)$ и $S_1(t_1)$ из условий (1.21) – частный случай множества $S(t_0,t_1)$ из условия (1.23), когда $S(t_0,t_1)=S_0(t_0)\times S_1(t_1)$, а множество (1.22) – частный случай множества (1.24).

Далее, пусть заданы множества Θ_0, Θ_1 на числовой оси R и $\sup\Theta_0<\inf\Theta_1$; $V(t)\subseteq E^r$, $G(t)\subseteq E^n$ при всех t: $\sup\Theta_0<t<\inf\Theta_1$.

Пусть также заданы множества $S_0(t_0)$, $S_1(t_1)$, причем $S_0(t_0)\subseteq G(t_0)$, $\quad t_0\in\Theta_0$, $S_1(t_1)\subseteq G(t_1)$, $\quad t_1\in\Theta_1$.

Пусть движение фазовой точки $x=(x_1,\ldots,x_n)^T$ описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=f(x,u,t) \quad (1.25)$$

где функция $f(x,u,t)$ определена $x\in G(t)$, $u\in V(t)$, $t_0\le t\le t_1$.

Определение 1.2. Набор $(t_0,t_1,x_0,u(\cdot),x(\cdot))$ называется допустимым набором, если управление $u=u(\cdot)=(u_1(t),\ldots,u_r(t))^T$ определено и кусочно-непрерывное на $t_0\le t\le t_1$ и удовлетворяет ограничению $u(t)\in V(t)$, $t_0\le t\le t_1$; $t_0\in\Theta_0$, $t_1\in\Theta_1$, $t_0\le t_1$; $x=x(\cdot)=x(\cdot,u(t),x_0)$ – траектория задачи Коши:

$$\dot{x}=f(x,u,t),\ t_0\le t\le t_1,\ x(t_0)=x_0, \quad (1.26)$$

которая определена на отрезке $[t_0, t_1]$ и удовлетворяет фазовым ограничениям (1.19), а $x(t_0) = x_0 \in S_0(t_0)$ $x(t_1) \in S_1(t_1)$.

Будем считать, что множество допустимых наборов $(t_0, t_{1,} x_0, u(\cdot), x(\cdot))$ непустое.

Замечание 1.2. Отметим, что обозначения, например, $z(t) = (z_1(t), \ldots, z_m(t))^T$, означает значение функции z в точке t. Саму же функцию будем обозначать $z(\cdot)$, или просто z. Сама функция – это отображение области определения функции в пространство E^m, которое ставит в соответствие каждой точке t из области определения некоторую точку из E^m.

Отметим, что ограничения в задачах управления могут быть ограничениями на значение функции, например, $u(t) \in V(t)$. Если же ограничение накладывается на всю функцию $u(\cdot)$ в целом и не является ограничением на значение функции в конкретных точках t, то тогда используется обозначение $u(\cdot)$. Ограничения на всю функцию $u(\cdot)$ в целом означает, что функция $u(\cdot)$, которая удовлетворяет этому ограничению, в отдельных точках или промежутках сколь угодно малой длины может принимать произвольные значения. Содержание ограничений определяется также и согласно с контекстом.

Пусть на множестве допустимых наборов задана функция (или целевая функция, функционал)

$$\begin{aligned} &J(x_0, u(\cdot), x(\cdot), t_0, t_1) = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t)dt + g_0(x_0, x(t_1), t_0, t_1), \end{aligned} \tag{1.27}$$

где $f^0(x(t), u(t), t)$, $g_0(x_0, x(t_1), t_0, t_1)$ – заданные функции при $x \in G(t)$, $u \in V(t)$, $\sup \Theta_0 < \inf \Theta_1$, $S_0(t_0) \subseteq G(t_0)$, $t_0 \in \Theta_0$, $S_1(t_1) \subseteq G(t_1)$, $t_1 \in \Theta_1$.

Задача оптимального управления заключается в том, чтобы минимизировать или максимизировать функционал (1.27) на множестве допустимых наборов вида $(t_0, t_1, x_0, u(\cdot), x(\cdot))$.

Замечание 1.3. Ограничимся рассмотрением задач на минимум, поскольку задача на максимум функционала J всегда может быть сведена к эквивалентной задачи на минимум функционала (- J).

Обозначим $J_* = \inf(t_0, t_{1,} x_0, u(\cdot), x(\cdot))$, где нижняя грань берется по всем допустимым наборам $\inf(\cdot)$.

Определение 1.3. Допустимый набор $(t_{0^*}, t_{1^*}, x_{0^*}, u_*(\cdot), x_*(\cdot))$ называется решением задачи оптимального управления, $u_*(\cdot)$ – оптимальным управлением, $x_*(\cdot)$ – оптимальной траекторией системы, если

$$J(t_{0^*}, t_{1^*}, x_{0^*}, u_*(\cdot), x_*(\cdot)) = J_*.$$

Тогда задачу оптимального управления можно записать в виде:

$$J(x_0, u(\cdot), x(\cdot), t_0, t_1) = \\ = \int_{t0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t)dt + g_0(x_0, x(t_1), t_0, t_1) \to \inf \tag{1.28}$$

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t) \;\; t_0 \le t \le t_1. \tag{1.29}$$

$$x \in G(t), t_0 \le t \le t_1. \tag{1.30}$$

$$x(t_0) = x_0 \in S_0(t_0) \;\; x(t_1) \in S_1(t_1),\; t_0 \in \Theta_0,\; t_1 \in \Theta_1. \tag{1.31}$$

$$u \in V(t), t_0 \le t \le t_1. \tag{1.32}$$

Считаем здесь управление $u = u(\cdot)$ кусочно-непрерывным на $[t_0, t_1]$ (если не сказано иное).

В частности, если $f^0 \equiv 1, g_0 \equiv 0$, то тогда $J(t_0, t_{1,} x_0, u(\cdot), x(\cdot)) = t_1 - t_0$, то есть имеем задачу быстродействия. Если начальный момент времени закреплен, то есть $\Theta_0 = \{t_0\}$, то в задаче (1.28) – (1.32) включения $t_0 \in \Theta_0$ опускают, вместо $J(t_0, t_{1,} x_0, u(\cdot), x(\cdot))$ пишут $J(t_{1,} x_0, u(\cdot), x(\cdot))$, а вместо $S_0(t_0)$ – S_0.

Аналогично поступают, если закреплен конечный момент времени или один из концов траектории. Если $V(t) = E^r$, $G(t) = E^n$, $t_0 \le t \le t_1$ или $S_0(t_0) \equiv E^n$, или $S_1(t_1) \equiv E^n$, то соответствующие ограничения в постановке задачи (1.28) - (1.32) опускают.

На практике встречаются задачи оптимального управления более общего вида, чем задача (1.28) - (1.32). В теории управления рассматриваются также задачи, учитывающие запаздывание информации, задачи с параметрами, с дискретным временем, с более общим видом целевой функции, задачи для интегро-дифференциальных уравнений, для уравнений с частными производными, для стохастических уравнений и др.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М., 1983.

2. Беллман Р. Динамическое программирование. – М., 1960.

3. Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. Оптимизация, оценка и управление. – М., 1972.

4. Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф. Основы теории управления. – К., 1975.

5. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М., 1980.

6. Зубов В.И. Лекции по теории управления. – М., 1975.

7. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. – М., 1975.

8. Острем К. Введение в стохастическую теорию оптимального управления. – М., 1973.

9. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. – М., 1968.

10. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. – М., 1978.

Дополнительная

11. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М., 1979.

12. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными обьектами. – М., 1976.

13. Аоки М. Оптимизация стохастических систем. – М., 1971.

14. Балакришнан А.В. Теория фильтрации Калмана. – М., 1984.

15. Бейко И.В., Бублик Б.Н., Зинько П.Н. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. – К., 1983.

16. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. – М., 1969.

17. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – К., 1985.

18. Бублик Б.Н., Данилов В.Я., Наконечный А.Г. Некоторые задачи наблюдения и управления в линейных системах / Учеб. пособие. – К., 1988.

19. Габасов Р., Кириллова Ф. Качественная теория оптимальных процессов. – М., 1971.

20. Гноенский Л.С., Каменский Г.А., Эльсгольц Л.Э. Математические основы теории управляемых систем. – М., 1969.

21. Зайцев Г.Ф., Костюк В.И., Чинаев П.И. Основы автоматического управления и регулирования. – К., 1977.

22. Иванов В.А., Фалдин Н.В. Теория оптимальных систем автома тического регулирования. – М., 1981.

23. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. – М., 1971.

24. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. – М., 1973.

25. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. – М., 1972.

26. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Минск, 1974.

27. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. – М., 1981.

28. Пропой А.И. Элементы теории дискретных оптимальных процессов. – М., 1973.

29. Растригин Л.А. Современные принципы управления сложными сис темами. – М., 1980.

30. Сейдж Э.П., Уайт Ч.С. III. Оптимальное управление системами. – М., 1982.

31. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управ ления. – М., 1978.

32. Цыпкин Я.З. Основы теории автоматических систем. – М., 1977.

33. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М., 1969.